



## Olimpiada națională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a IX-a

### BAREM DE CORECTARE

1. a) Demonstrați că pentru orice  $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ , are loc relația  
 $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ .  
b) Să se arate că nu există matrice  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietățile  
 $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$  și  $\det(A^2 - B^2) < 0$ .

*Traian Tămâian și Buth Gigel*

#### Soluție:

- a) Calcul direct. 2p
- b) Presupunem că există două matrice  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietățile  
 $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$  și  $\det(A^2 - B^2) < 0$ . 1p
- Dar pentru orice  $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ , are loc relația  $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ . (1)
- Înlocuind în relația (1) pe  $X$  cu  $A^2$  și pe  $Y$  cu  $B^2$  rezultă  
 $\det(A^2 + B^2) + \det(A^2 - B^2) = 2[\det(A^2) + \det(B^2)]$ . (2) 1p
- Relația din enunț se scrie  $A^2 + B^2 = -2AB$ , de unde  
 $\det(A^2 + B^2) = (-2)^2 \det(AB) \Leftrightarrow \det(A^2 + B^2) = 4 \det A \det B$  (3) 1p
- Din (2) și (3) rezultă că  $4 \det A \det B + \det(A^2 - B^2) = 2([\det A]^2 + [\det B]^2) \Leftrightarrow$   
 $\det(A^2 - B^2) = 2(\det A - \det B)^2$ . (4) 1p
- Cum  $\det(A^2 - B^2) < 0$ , din (4) rezultă că  $2(\det A - \det B)^2 < 0$ , absurd. 1p
- Rezultă că presupunerea făcută este falsă și deci nu există matrice  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietățile din enunț. 1p



2. Fie  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $AB + BA = I_2$ .

Arătați, că  $A^{2^n} \cdot B = B \cdot A^{2^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Adrian Bud

**Soluție:**

$$AB + BA = I_2 \cdot A$$

$$ABA + BA^2 = A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^2B &= BA^2 \\ A^2B &= BA^2 \cdot A^2 \\ A^2BA &= BA^4 \\ \Rightarrow A^4B &= BA^4 \end{aligned}$$

$$A \cdot | AB + BA = I_2$$

$$A^2B + ABA = A$$

1p

1p

$$A^2B = BA^2 \cdot A^2$$

$$A^4B = ABA^2$$

1p

1p

Presupunem că:  $A^{2^n}B = BA^{2^n}$  și demonstrăm prin inducție că:  $A^{2^{n+1}}B = BA^{2^{n+1}}$

1p

Procedând ca mai sus cu factorul  $A^{2^n}$  se obține relația dorită.

1p

Finalizare

1p

3. Să se calculeze: 
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - {}^{2016}\sqrt{1 + \sin^2 x}}{1 - \cos x}}$$

Traian Tămîian și Buth Gigel

**Soluție:**

$$\text{Fie } L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - {}^{2016}\sqrt{1 + \sin^2 x}}{1 - \cos x}}$$

$$\text{Avem } L^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - {}^{2016}\sqrt{1 + \sin^2 x}}{1 - \cos x} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - {}^{2016}\sqrt{1 + \sin^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - {}^{2016}\sqrt{1 + \sin^2 x}}{x^2} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{1 - \cos x} =$$

2p

$$= L_1 \cdot L_2, \text{ unde } L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(e^{x^2} - 1) + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - ({}^{2016}\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1)}{x^2} =$$

1p



$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right]^4 - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2016}} - 1}{x^2} =$$

1p

$$= \ln e + 1 - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2016}} - 1}{\sin^2 x} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 - \frac{1}{2016} = \frac{4031}{2016}.$$

1p

$$L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{2 \sin^2(\frac{x}{2})} = 2, \text{ rezultă că } L = L_1 \cdot L_2 = \frac{4031}{2016} \cdot 2 = \frac{4031}{1008}$$

1p

Rezultă că limita cerută este  $L = \sqrt{\frac{4031}{1008}}.$

1p

4. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale nenegative cu  $a_1 = 0$  pentru care

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{1}{a_n + a_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (a_{n+1} - a_n).$

*Ványi Emese*

**Soluție:**

Determinăm  $a_2 = 1$  1p

și  $a_3 = \sqrt{2}$  1p

Observăm că  $a_n = \sqrt{n-1}$  1p

Demonstrația prin inducție 2p

Calcularea limitei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{2}$  2p